令和３年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題
環境・情報科学科 数学 解答例

1

(1)

31 が素数でないと仮定する．$31 = pq$（pは 30 以下の素数，qは 30 以下の自然数）と表せる．31 は奇数なので，p, q はいずれも奇数である．qは 3 以上の奇数となり，pは 9 以下の奇数となる．9=3^2 は素数でない．$p = 3$のとき，$q = 31/3$，$p = 5$のとき，$q = 31/5$，$p = 7$のとき，$q = 31/7$，となり，いずれの場合もqは自然数でない．故に，31 が素数でないという仮定は誤りであるので，31 は素数である．（証明終わり）

(2)

${}_{31}C_r$ $(r = 1,2,\cdots,30)$を 31 で割った余りが 0 でないと仮定する．${}_{31}C_r = 31m + n$ ⋯①

mは 0 以上の整数，nは 30 以下の正の整数．${}_{31}C_r = \frac{31!}{(31-r)!r!}$　故に，

$(31-r)!\,\mathrm{r}!\,{}_{31}C_r = 31!$ ⋯② となる．②に①を代入して整理すると，
$n(31-r)!\,r! = 31\{30! - m(31-r)!\,r!\}$⋯③ 31 は素数であり，$1 \leqq r \leqq 30$であるので，$(31-r)!$および$r!$は，いずれも 31 とは 1 以外の公約数をもたない自然数である．故に，③の左辺は 31 で割った余りが 0 でない．③の右辺は 31 で割った余りは 0 である．従って，③の等号が成立しない．故に，${}_{31}C_r$ $(r = 1,2,\cdots,30)$を 31 で割った余りが 0 でないという仮定は誤りであるので，${}_{31}C_r$ $(r = 1,2,\cdots,30)$を 31 で割った余りは 0 である．（証明終わり）

(3)

「$n^{31} - n$を 31 で割った余りは 0 である」を(A)とする．
[1] $n = 1$のとき $n^{31} - n = 0$．よって，$n = 1$のとき，(A)は成り立つ．
[2] $n = k$（kは自然数）のとき，(A)が成り立つ，すなわち，$k^{31} - k$を 31 で割った余りが 0 であると仮定する．
$n = k + 1$のとき，二項定理を用いて整理すると，

$$(k+1)^{31} - (k+1) = k^{31} - k + \sum_{r=1}^{30} {}_{31}C_r k^{31-r} \quad \cdots ④$$

ここで，(2)より，$\sum_{r=1}^{30} {}_{31}C_r k^{31-r}$ を 31 で割った余りは 0 である．また，仮定より，$k^{31} - k$を 31 で割った余りは 0 であるので,④の右辺を 31 で割った余りは 0 である. よって,$n = k + 1$のとき，(A)は成り立つ.
[1], [2]から，すべての自然数n について(A)は成り立つ．（証明終わり）

$\boxed{2}$

(1) $1 \leqq x \leqq 2$ における関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の最小値は $\dfrac{1}{2}$ なので $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2}$

同様にすると $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{3}, \cdots, \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{n}$

よって $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^n = \log n$ (証明終わり)

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 2} > \dfrac{1}{2^2},\ \dfrac{1}{2\cdot 3} > \dfrac{1}{3^2}, \cdots, \dfrac{1}{(n-1)\cdot n} > \dfrac{1}{n^2}$ を踏まえると

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1$ (証明終わり)

(3) $n = 1, 2, 3 \cdots$ に対して $a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + \dfrac{3}{a_n^3} + \dfrac{1}{a_n^6}$ なので $\displaystyle a_{n+1}^3 = a_1^3 + 3n + 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^6}$ $\cdots$ ①

$a_1^3 = 1$ かつ $a_2^3 > 1,\ a_3^3 > 1, \ldots a_n^3 > 1$ を踏まえると $n = 1, 2, 3 \cdots$ に対して $a_{n+1}^3 > 3n + 5 > 3(n+1)$

よって n が 2 以上の自然数のとき $a_n^3 > 3n$ (証明終わり)

(4) ① を変形すると，n が 2 以上の自然数のとき $\displaystyle a_{n+1}^3 = 3n + 5 + 3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k^3} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k^6}$

(3) を踏まえると，n が 2 以上の自然数のとき $\displaystyle a_{n+1}^3 = 3n + 5 + 3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k^3} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k^6} < 3n + 5 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}$

さらに (1), (2) を踏まえると，n が 2 以上の自然数のとき $a_{n+1}^3 < 3n + \log n + \dfrac{46}{9}$

よって (3) と併せると，n が 2 以上の自然数のとき $3(n+1) < a_{n+1}^3 < 3n + \log n + \dfrac{46}{9}$

ゆえに $n = 242$ とすると $729 < a_{243}^3 < 732 + \log 242$

$729 = 3^6,\ \log 242 < \log 256 = \log 2^8 < \log e^8 = 8$ を踏まえると $9^3 < a_{243}^3 < 740 < 10^3$

したがって $9 < a_{243} < 10$ なので a_{243} の値の整数部分は 9 である (証明終わり)

$\boxed{3}$

(1)

αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a,b,c)\cdots$①おくと，題意より，$\vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\sqrt{3}a+\sqrt{3}b=0\cdots$②，$\vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\sqrt{3}a+c=0\cdots$③である．①，②，③より，$\vec{n}=a\left(1,1,\sqrt{3}\right)\cdots$④である．$\alpha$上の点を$\mathrm{Q}(x,y,z)$とすると，$\vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=a\left(x+y+\sqrt{3}z-\sqrt{3}\right)=0\cdots$⑤となる．$\vec{n}\neq\vec{0}$であるので，④より$a\neq 0\cdots$⑥である．⑤，⑥より，$x+y+\sqrt{3}z-\sqrt{3}=0\cdots$(答)

(2)

H の座標を(h_1,h_2,h_3)とする．題意より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(h_1-s,h_2-t,h_3-2)\cdots$⑦ は，$\vec{n}$と平行なので，④，⑦より，$(h_1-s,h_2-t,h_3-2)=k\left(1,1,\sqrt{3}\right)\cdots$⑦'となる 0 でない実数$k$が存在する．故に，$h_1-s=k\cdots$⑧，$h_2-t=k\cdots$⑨，$h_3-2=\sqrt{3}k\cdots$⑩ となる．H が$\alpha$上にあるので，$h_1+h_2+\sqrt{3}h_3-\sqrt{3}=0\cdots$⑪ となる．⑧，⑨，⑩，⑪より，$k$を消去して整理すると，$h_1=\frac{4s-t-\sqrt{3}}{5}\cdots$⑫，$h_2=\frac{-s+4t-\sqrt{3}}{5}\cdots$⑬，$h_3=\frac{-\sqrt{3}s-\sqrt{3}t+7}{5}\cdots$⑭ となる．

故に，H の座標は，$\left(\frac{4s-t-\sqrt{3}}{5},\frac{-s+4t-\sqrt{3}}{5},\frac{-\sqrt{3}s-\sqrt{3}t+7}{5}\right)\cdots$(答)

(3)

⑦，⑦'，⑧，⑫より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{s+t+\sqrt{3}}{5}\left(1,1,\sqrt{3}\right)\cdots$⑮ となる．題意と⑫，⑬，⑭より，$4s-t\geqq\sqrt{3}\cdots$⑯，$-s+4t\geqq\sqrt{3}\cdots$⑰，$s+t\leqq\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdots$⑱となる．題意と⑮，⑱より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}\left|s+t+\sqrt{3}\right|\leqq\frac{2\sqrt{15}}{3}\cdots$⑲となる．$s=t=\frac{7\sqrt{3}}{6}$のとき，⑯，⑰，⑱をすべて満たし，$s+t=\frac{7\sqrt{3}}{3}$となるので，⑲より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|$の最大値は．$\frac{2\sqrt{15}}{3}\cdots$(答)

(4)

A と B の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$となる．△ABC は，線分 AC と線分 BC の長さが等しい 2 等辺三角形であるので, M は C から A, B を通る直線に下した垂線の足となる．故に，△ABC の面積Sは，$S=\frac{1}{2}\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdots$⑳ $\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|$の最大値は$\frac{2\sqrt{15}}{3}$であるので，⑳より，求める四面体 ABCP の体積Vは，$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{2\sqrt{15}}{3}=\frac{5}{3}\cdots$(答)

$\boxed{4}$

（１） $y=x^3-12x+1$ のとき、 $y'=3x^2-12$ であるので、点 $(t,t^3-12t+1)$ における接線の方程式は

$y=(3t^2-12)(x-t)+t^3-12t+1$．よって $y=3(t^2-4)x-2t^3+1\cdots$①…（答）

（２）①が点 $\mathrm{P}(p,q)$ を通るとき $q=3(t^2-4)p-2t^3+1$．よって $2t^3-3pt^2+12p-1+q=0\cdots$②

C に P から引いた３本の接線が相異なるとき、②は相異なる実数解を３つもつ。

②の左辺を $f(t)$ とすると $f'(t)=6t^2-6pt=6t(t-p)$． $p>0$ より $f(t)$ の増減表は下のようになる.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(p)$	$\nearrow$

ここで $f(0)=12p-1+q$ 、 $f(p)=-p^3+12p-1+q$.

よって、②が相異なる実数解を３つもつためには、増減表より $f(0)>0$ かつ $f(p)<0$ 、すなわち

$q>-12p+1$ かつ $q<p^3-12p+1$ 　よって、$-12p+1<q<p^3-12p+1\cdots$（答）

（３）P が C 上にあるとき $(p,q)=(p,p^3-12p+1)$．②より $(t-p)^2(2t+p)=0$．よって C の接線の接点は点 $(p,p^3-12p+1)$ または点 $\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{1}{8}p^3+6p+1\right)$． $p>0$ より接点の x 座標が負であるのは $\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{1}{8}p^3+6p+1\right)$．よって、C: $y=g(x)=x^3-12x+1$ 、C 上の点 $\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{1}{8}p^3+6p+1\right)$ における接線: $y=h(x)=3\left(\dfrac{p^2}{4}-4\right)x+\dfrac{p^3}{4}+1$ より、$g(x)-h(x)=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2(x-p)$. ゆえに $-\dfrac{p}{2}\leqq x\leqq p$ で $g(x)\leqq h(x)$．したがって求める面積は $\displaystyle\int_{-\frac{p}{2}}^{p}\{h(x)-g(x)\}dx=\frac{27}{64}p^4\cdots$（答）

令和 3 年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題
環境・情報科学科 数学 配点

$\boxed{1}$

(1)35 点，(2)35 点，(3)30 点

$\boxed{2}$

(1)20 点，(2)20 点，(3)20 点，(4)40 点

$\boxed{3}$

(1)20 点，(2)20 点，(3)30 点，(4)30 点

$\boxed{4}$

(1)20 点，(2)40 点，(3)40 点

以上