(解答例)

$\boxed{1}$

(1)
AB=2、AC=5 であり、90°＜∠BAC ＜ 180° である。
仮に∠BAC＝90° のとき、BC は三平方の定理より

$$b = \sqrt{29}$$

また、∠BAC＝180° であれば

$$b = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 7$$

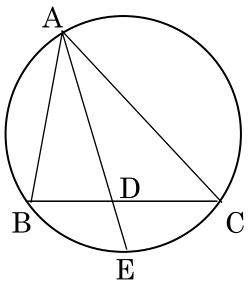
従って b の取り得る範囲は

$$\sqrt{29} < b < 7$$

これを満たす自然数は 6 しかない。
よって

$$b = 6$$

(2)



△ABC の外接円と直線 AD の交点のうち，A 以外の点を E とする．
題意より

$$\angle \mathrm{EAB}＝\angle \mathrm{CAD}$$

円周角の定理より

$$\angle \mathrm{AEB}＝\angle \mathrm{ACD}$$

であるから

$$\triangle \mathrm{AEB} \backsim \triangle \mathrm{ACD}$$

よって

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC}$$

従って

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}＝\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}$$

また，方べきの定理より

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}＝\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}&＝\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\\&＝\mathrm{AD}(\mathrm{AD}+\mathrm{DE})\\&＝\mathrm{AD}^2+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}\\&＝\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}$$

従って

$$p^2=10a^2-qr$$

(3)

$$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ACD}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 5a \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \mathrm{AD} \cdot \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot \mathrm{AD} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

$$5a \cdot \sin\theta = \frac{7}{2} \cdot \mathrm{AD} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\mathrm{AD} = \frac{10}{7} a \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

2 倍角の公式

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

を用いると

$$\mathrm{AD} = \frac{20}{7} a \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

従って

$$p = \frac{20}{7} a \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

$\boxed{2}$

（1）袋の中に入っている種子の発芽率は $\left(\dfrac{25}{30}\right)$

同じ袋が 4 個あり，取り出した 4 粒の種子のうち発芽した種子が 2 粒となる組み合わせは ${}_4C_2$ だけある．よって，

$${}_4C_2\left(\frac{25}{30}\right)^2\left(\frac{5}{30}\right)^2 = {}_4C_2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4\cdot 3}{2!}\cdot\frac{25}{1296} = \frac{25}{216}$$

（2）袋の中に入っている種子の発芽率は $\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

このとき，事象 A：少なくとも 1 粒は発芽した

事象 B：すべての種子が発芽している　とする．

事象 A は，すべての種子が発芽しないという事象の余事象であるので，

$$1-\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{728}{729}$$

求める条件付き確率は，A を全事象とした場合に，事象 A∩B の起こる確率であるので，

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\frac{728}{729}} = \frac{8}{91}$$

（3）袋の中に入っている種子の発芽率は$\left(\dfrac{10}{30}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)$

少なくとも 1 粒は発芽する確率は, すべての種子が発芽しないという事象の余事象なので,

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^k \geqq 0.992$　つまり，$\left(\frac{2}{3}\right)^k \leqq 0.008$ となる k を求める．

両辺の常用対数をとると，$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^k \leqq \log_{10}0.008$

左辺 $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ は，$k\cdot(\log_{10}2-\log_{10}3)$

右辺 $\log_{10}0.008$ は，$\log_{10}\left(\frac{8}{1000}\right)=\log_{10}\left(\frac{2\cdot 4}{1000}\right) = \log_{10}2+\log_{10}2^2-\log_{10}1000$

よって，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ より，

$k\cdot(0.3010-0.4771) \leqq 0.3010+(2\times 0.3010)-3$

$-0.1761k \leqq -2.097$

$k \geqq 11.908$

よって，最低 12 個の袋が必要となる．

$\boxed{3}$

解答例

$y = \left| -\frac{2}{9}x^2 + 2 \right| + \frac{1}{3}x - 1$ ・・・①とすると、

① と x軸で囲まれる部分の面積を求めれば良い。

ここで $-\frac{2}{9}x^2 + 2 \geqq 0$ を解くと

$x^2 - 9 \leqq 0$ より $-3 \leqq x \leqq 3$

したがって①式を $f(x)$ とおくと

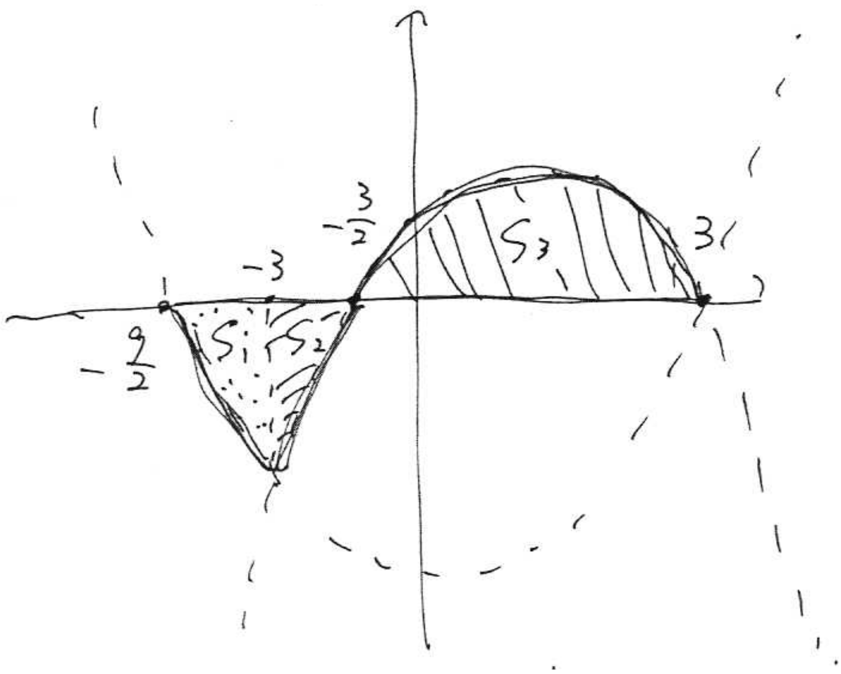
$-3 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 2 + \frac{1}{3}x - 1 = -\frac{1}{9}(2x^2 - 3x - 9) = -\frac{1}{9}(2x + 3)(x - 3)$$

$x < -3,\ x > 3$ のとき

$$f(x) = -(-\frac{2}{9}x^2 + 2) + \frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{9}(2x^2 + 3x - 27) = \frac{1}{9}(2x + 9)(x - 3)$$

となるから、グラフは以下のようになる。



したがって求める面積をＳとすると、$S = S_1 + S_2 + S_3$

$S_1 = -\frac{1}{9}\int_{-\frac{9}{2}}^{-3}(2x^2+3x-27)\,dx$

$= -\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-27x\right]_{-\frac{9}{2}}^{-3}$

$= -\frac{1}{9}\left[\left\{\frac{2}{3}\cdot(-3)^3+\frac{3}{2}(-3)^2-27\cdot(-3)\right\}-\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\left(-\frac{9}{2}\right)^2-27\cdot(-\frac{9}{2})\right\}\right]$

$= -\frac{1}{9}\left[\left\{-18+\frac{27}{2}+81\right\}-\left\{-\frac{243}{4}+\frac{243}{8}+\frac{243}{2}\right\}\right]$

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{153}{2}-\frac{729}{8}\right)$

$= \frac{13}{8}$

$S_2 = \frac{1}{9}\int_{-3}^{-\frac{3}{2}}(2x^2-3x-9)\,dx$

$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-9x\right]_{-3}^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{9}\left[\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^2-9\cdot(-\frac{3}{2})\right\}-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-3)^3-\frac{3}{2}(-3)^2-9\cdot(-3)\right\}\right]$

$= \frac{1}{9}\left[\left\{-\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\frac{27}{2}\right\}-\left\{-18-\frac{27}{2}+27\right\}\right]$

$= \frac{1}{9}\left\{\frac{63}{8}-\left(-\frac{9}{2}\right)\right\}$

$= \frac{11}{8}$

$S_3 = -\frac{1}{9}\int_{-\frac{3}{2}}^{3}(2x^2-3x-9)\,dx$

$= -\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-9x\right]_{-\frac{3}{2}}^{3}$

$= -\frac{1}{9}\left[\left\{\frac{2}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2-9\cdot 3\right\}-\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-9\cdot(-\frac{3}{2})\right\}\right]$

$= -\frac{1}{9}\left[\left\{18-\frac{27}{2}-27\right\}-\left\{-\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\frac{27}{2}\right\}\right]$

$= -\frac{1}{9}\left(-\frac{45}{2}-\frac{63}{8}\right)$

$= \frac{27}{8}$

したがって、$S = S_1+S_2+S_3 = \frac{13}{8}+\frac{11}{8}+\frac{27}{8} = \frac{51}{8}$